سلم تصحيح مقرر الطبولوجيا (1)

السنة الثانية - رياضيات

الدورة الإضافية . العام الدراسي ٢٠١٥/٢٠١٦

السؤال الأول (٤٠ علامة):

أ - 1) نقول عن المجموعة V إنها جوار للنقطة x في الفضاء المتري (X,d) إذا وجدت كرة مفتوحة $B(x,r)$ مركزها x ونصف قطرها $r>0$ بحيث:

$B(x,r) \subseteq V$ 4

2) المجموعة المحدودة هي تلك التي يمكن احتواؤها في كرة مغلقة نصف قطرها عدد منته. 4

3) نقول عن النقطة x إنها نقطة جبهية (حدودية) للمجموعة A إذا كان أي جوار لـ x يتقاطع مع A ومع متممتها $X \setminus A$. 4

ب - 1) $A^{\circ} =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$; $\bar{A} =]-\infty,-1] \cup \{0\} \cup [1,+\infty[$ 4 4

$A' =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ 4 ; $Fr(A) = \{-1,0,1\}$ 4

$Ext(A) = \mathbb{R} \setminus \bar{A} =]-1,0[\cup]0,1[$ 4

2) المجموعة A ليست كثيفة لأن $\bar{A} \neq \mathbb{R}$ 4

3) الفضاء الجزئي A غير تام لأن A غير مغلقة. 4

السؤال الثاني (٢٠ علامة):

1) لتكن $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ مجموعة منتهية في فضاء متري X، ولنأخذ تغطية مفتوحة كيفية $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ لـ A. إن النقطة a_i ستنتمي إلى إحدى مجموعات التغطية ولتكن U_{α_i} $(i=1,2,\dots,n)$. من هنا نجد أن $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}$ تشكل تغطية مفتوحة منتهية لـ A، وبالتالي A متراصة. 10

2) لتكن $x \in \mathbb{Q}$. إن المجموعتين $A =]-\infty,x[$, $B =]x,+\infty[$ تشكلان تقسيماً للمجموعة S لأن A ، B مفتوحتان وتحققان الشروط:

$A \cap S \neq \phi$, $B \cap S \neq \phi$, $A \cap B \cap S \neq \phi$, $A \cup B \supseteq S$ 10

وهذا يعني أن S غير مترابطة.

لتكن U مجموعة مفتوحة في المستقر $\mathbb{R}$. هناك احتمالان:
الأول: $3 \in U$ ومنه: $f^{-1}(U)=\mathbb{R}$ مجموعة مفتوحة
الثاني: $3 \notin U$ ومنه $f^{-1}(U)=\Phi$ مجموعة مفتوحة.
إذن، الصورة العكسية وفق f لأي مجموعة مفتوحة في المستقر هي مجموعة مفتوحة في المنطلق، وبالتالي التطبيق f مستمر.

السؤال الثالث (٢٠ علامة):

أ- لدينا $A^\circ \subseteq A$ ، $B^\circ \subseteq B$ ومنه: $A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B$

5 من هنا ينتج أن: $A^\circ \cap B^\circ = (A^\circ \cap B^\circ)^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$

من جهة ثانية لدينا: $A \cap B \subseteq A \Leftarrow (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ$

و $A \cap B \subseteq B \Leftarrow (A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ$

5 إذن: $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$. من علاقتي الاحتواء ينتج المساواة المطلوبة.

ب- المبرهنة:
1) لزوم الشرط 14
2) كفاية الشرط 6

أ.د. طالب غريبة

حمص في ٢١/٨/٢٠١٦